Desenvolvendo o raciocínio relacional nos alunos dos primeiros anos

João Pedro da Ponte[1]

Raquel Cerca

Introdução

Nos últimos 25 anos, a aprendizagem da Álgebra nos primeiros anos de escolaridade tem vindo a ser cada vez mais valorizada (BLANTON; KAPUT, 2011; NCTM, 2007; KAPUT, 1999). Uma das vertentes dessa valorização é a ênfase nas relações e propriedades matemáticas. Assim, por exemplo, na resolução de questões numéricas envolvendo relações de igualdade e desigualdade, isso significa valorizar resoluções em que a reposta é obtida usando relações e propriedades, sem realizar sequencialmente todos os cálculos (CARPENTER; FRANKE; LEVI, 2003; MOLINA; CASTRO; CASTRO, 2009). Para isso, é fundamental que os alunos compreendam as propriedades algébricas da relação de igualdade. Deste modo, um dos objetivos do ensino da Álgebra nos primeiros anos é levar os alunos a representar e analisar situações e estruturas matemáticas, usando, em questões aritméticas, métodos e estratégias essencialmente algébricos.

Neste capítulo, procuramos mostrar como se pode desenvolver o raciocínio relacional dos alunos do 3.º ano (alunos com 8-9 anos) ao longo de uma experiência de ensino, dando importância às relações de igualdade e desigualdade e à capacidade de generalização a partir de tarefas que envolvem quantidades desconhecidas.

Raciocínio relacional

Os alunos contactam com relações matemáticas quando trabalham com Números e Operações. Desenvolvem o raciocínio relacional através deste contacto com relações que envolvem as operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) e as suas propriedades (comutativa, associativa, distributiva da multiplicação em relação à adição, existência de elemento neutro). Para Ponte, Branco e Matos (2009), o raciocínio

1 Instituto de Educação, Universidade de Lisboa; jpponte@ie.ulisboa.pt; raquelcerca@gmail.com

relacional é a capacidade de estabelecer relações entre os números e os símbolos, tendo em conta as propriedades que estão subjacentes. Assim, os alunos terão que ser capazes de observar duas ou mais expressões como fazendo parte de um todo e não como partes independentes.

O raciocínio relacional desenvolve-se através da compreensão da estrutura das relações. A compreensão da relação de igualdade inicia-se desde muito cedo, quando os alunos, de forma intuitiva, desenvolvem conexões aritméticas simples relacionadas com as propriedades das operações. Como exemplo destas aprendizagens, Carpenter, Franke e Levi (2003) referem o raciocínio que um aluno apresenta ao adicionar 50 mais 30. O aluno diz que o resultado é 80, porque 5 mais 3 é 8 e depois multiplica por 10. O aluno não indica as propriedades da adição e da multiplicação que utiliza, mas realiza um raciocínio no qual as propriedades estão presentes. No fundo ele faz o seguinte raciocínio: $50 + 30 = 5\times10 + 3\times10 = (5 + 3)\times10 = 8\times10=80$. Ou seja, o aluno decompôs 50 e 30 (usando a definição de multiplicação como adição sucessiva), usou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e multiplicou 8 por 10, obtendo 80.

Outro exemplo da aprendizagem da relação de igualdade e da compreensão do significado do sinal de igual dado por estes autores surge na resposta de uma aluna ao observar a expressão $18 + 27 = \_\_\_ + 29$. Nesta situação, a aluna refere que o valor em falta é 16 porque 29 são mais dois que 27, então o número em falta tem que ser menos dois que 18 para que os dois lados sejam iguais. A aluna transforma a expressão dada em $18 + 27 = \_\_\_ + 27 + 2$, depois, usando a propriedade comutativa da adição, volta a transformar em $18 + 27 = \_\_\_ + 2 +27$. Daqui conclui que o número em falta tem que satisfazer $18 = \_\_\_ + 2$, de onde conclui que esse número é 16. Este tipo de raciocínio é muito importante porque a aluna reconhece que o sinal de igual representa uma relação de equivalência. Outro aspeto muito interessante é que a aluna não sente necessidade de apresentar cálculos e olha para as relações que se estabelecem na expressão apresentada.

Para o desenvolvimento do raciocínio relacional, é muito importante o tipo de tarefa que se propõe aos alunos. Canavarro (2007, p. 97) faz referência à "algebrização de problemas aritméticos" em que se transformam problemas aritméticos que conduzem a uma só resposta em problemas e tarefas de investigação nos quais se valoriza a "construção de regularidades, conjeturas, generalizações e sua justificação e explicação" (p. 97). Neste nível de ensino, existem dois tipos principais de questões

(MOLINA; CASTRO; CASTRO, 2009): questões de verdadeiro e falso, em que se pretende que os alunos confirmem a veracidade da expressão e justifiquem a sua escolha, e questões de valor omisso, em que se pretende que os alunos encontrem o valor que falta para que uma expressão fique verdadeira. Com estas questões conseguimos detectar qual o entendimento que os alunos têm do sinal de igual e se usam, de forma espontânea, raciocínio relacional.

Na verdade, a maioria dos alunos desenvolve uma noção muito limitada do sinal de igual (KIERAN, 1981; MOLINA; CASTRO; CASTRO, 2009). Assim, olhando para a expressão 5 + 3 = __ consideram que este sinal indica uma operação a realizar e não uma equivalência entre os dois membros de uma expressão. Esta noção muito limitada surge, naturalmente, como consequência de serem propostos aos alunos muitos problemas do tipo "calcula 5 + 3 = __" e poucos ou nenhuns problemas em que o sinal de igual tem efetivamente o significado de equivalência. Carpenter, Franke e Levi (2003) indicam duas outras possíveis razões que levam os alunos a ter concepções erradas sobre o significado do sinal de igual: (i) as calculadoras reforçam o significado de que após o sinal de igual vem a resposta ao cálculo e (ii) os alunos têm uma predisposição para pensar na igualdade em termos de resposta do cálculo em vez de uma relação.

Kieran (1981) refere também que o símbolo que mostra equivalência, "=", nem sempre é interpretado como indicando uma equivalência. A autora afirma que, inicialmente, os alunos interpretam o sinal de igual como simbolizando o que devem somar e não conseguem compreender a expressão como uma relação entre dois membros. A interpretação do = como indicando uma operação a fazer surge em primeiro lugar e a interpretação como equivalência só surge muito mais tarde. A percentagem de alunos que consegue interpretar o = como equivalência vai evoluindo ao longo dos anos de escolaridade.

Uma das formas de desenvolver o raciocínio relacional é através das estratégias que o professor promove em sala de aula. Este tem que ser capaz de criar situações envolvendo a discussão entre os alunos, trabalhando em pares, em pequenos grupos ou de forma coletiva com toda a turma. Os momentos de partilha e discussão de ideias são fulcrais ajudando os alunos a organizar e justificar o seu raciocínio e a reconhecer como válidas outras estratégias apresentadas pelos seus colegas. Este tipo de tarefa, que visa promover o raciocínio algébrico, não deve ser proposto apenas a um grupo restrito de alunos, mas a todos os alunos da turma. Torna-se importante que todos eles possam aprender a pensar sobre as relações que envolvem números, operações e suas propriedades como suporte da aprendizagem da Matemática (CARPENTER; FRANKE, LEVI, 2003; CARPENTER; LEVI; FRANKE; ZERINGUE, 2005; MOLINA; CASTRO; CASTRO, 2009).

Dois aspetos centrais no raciocínio matemático em geral (e, portanto, do raciocínio algébrico) são a realização de generalizações e justificações (PONTE; MATA-PEREIRA; HENRIQUES, 2012). Uma dinâmica de sala de aula que valoriza a comunicação e a discussão entre os alunos ajuda-os a desenvolver a sua capacidade de justificarem os seus raciocínios e a elaborarem generalizações. É a partir das justificações que apresentam, sobretudo na exposição das suas ideias e na sua discussão com toda a turma, que os alunos desenvolvem generalizações, seja em linguagem natural, seja em linguagem simbólica. Carpenter, Franke e Levi (2003) referem que grande parte das generalizações apresentadas pelos alunos baseia-se no uso de propriedades, principalmente a propriedade comutativa e as propriedades do número (elemento neutro da adição). Contudo, surgem generalizações baseadas noutras propriedades, bem como generalizações relacionadas com conceitos como números pares e ímpares, classes de números e até mesmo critérios de divisibilidade.

Ellis (2011) vê a formulação de generalizações como um processo dinâmico que envolve ciclos de interação entre o professor e os alunos. É através da discussão que os alunos vão melhorando ou elaborando novas generalizações. Esta ideia de dinâmica de sala de aula assume que o desenvolvimento da generalização é um ato coletivo, num contexto matemático específico, que dá especial atenção às interações sociais, às ferramentas, à própria história de cada aluno, mas também à existência de bom ambiente de sala de aula propiciador da participação e da aprendizagem.

O uso adequado de símbolos é muito importante para realizar generalizações e justificações. Para desenvolver nos alunos o seu sentido de símbolo e a sua capacidade de generalizar e justificar, é importante ter um ambiente propício na sala de aula. Arcavi (1994, 2006) defende que a abordagem feita pelo professor tem um papel muito importante. As questões que o professor coloca e a discussão que fomenta em torno das expressões, tornam-se preponderantes para o desenvolvimento do sentido de símbolo dos alunos. Deste modo, é importante cultivar em sala de aula uma procura dos significados dos símbolos, evitando a aplicação automática de procedimentos. Carpenter, Franke e Levi (2003) também referem que não devemos cair na armadilha de usar apenas raciocínio computacional, recorrendo a cálculos, mas ajudar os alunos a criar novas estratégias, promovendo a discussão de processos alternativos à resolução direta da expressão através de cálculos.

Metodologia de investigação

A experiência de ensino que serve de base a este estudo foi realizada de fevereiro a abril do ano letivo de 2013/2014, num total de 8 sessões. Cada sessão tem a duração de 90 minutos e a sua periocidade é de uma vez por semana. A primeira sessão foi de diagnóstico e teve como objetivo perceber como os alunos interpretavam as relações de igualdade e desigualdade. Nas sessões 2, 3 e 4, pretendia-se que os alunos desenvolvessem o seu conhecimento sobre estas duas relações. Nas sessões 5, 6 e 7, o objetivo era que eles desenvolvessem estratégias relacionais para a resolver questões, bem como para realizar justificações e generalizações. A oitava e última sessão pretendia avaliar as aprendizagens ao longo da unidade de ensino. As sessões foram organizadas em três grandes momentos, segundo a abordagem exploratória (PONTE, 2005): (i) apresentação da tarefa; (ii) exploração e resolução da tarefa a pares ou individualmente e (iii) discussão e reflexão em grande grupo. As aulas foram lecionadas pela segunda autora.

A metodologia do estudo segue uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Este realiza-se com uma turma do 3.º ano de uma escola de ensino público do concelho de Soure, distrito de Coimbra, constituída por 16 alunos (6 raparigas e 10 rapazes). Dois alunos têm deficiências profundas e não se encontram junto da turma a maior parte do tempo. Outra aluna foi transferida para a turma quase no final do estudo, participando apenas nas 3 últimas sessões. Os alunos estão habituados a partilhar e discutir as suas ideias na sala de aula e demonstram vontade em fazê-lo. De uma maneira geral, trabalham de modo individual, mas também fazem trabalhos a pares e em pequenos grupos.

Os dados recolhidos são de natureza descritiva, tendo por base os registos de vídeo e as notas de campo provenientes da observação da turma e as resoluções das tarefas feitas pelos alunos. Neste capítulo, analisamos resoluções de algumas questões, procurando destacar a compreensão das relações de igualdade e desigualdade, bem como a realização de generalizações pelos alunos.

Análise das resoluções dos alunos

Compreensão das relações de igualdade e desigualdade

As resoluções dos alunos demonstram a sua compreensão das relações de igualdade e desigualdade. Inicialmente a turma reconhece, com alguma facilidade, o sinal de igual. Os alunos mostram-se, naturalmente, habituados a trabalhar com expressões como $a + b = c$ (em que a e b são dados e c é pedido). Além disso, já tinham contatado em anos anteriores com os sinais associados à relação de ordem. Costumam solucionar os problemas através dos algoritmos e no diagnóstico apenas um aluno (David) utiliza estratégias relacionais.

Na sessão 1 são apresentadas diversas questões de valor omisso (Fig. 1), cujo objetivo é encontrar o valor que torna a expressão verdadeira. Os alunos têm que justificar as suas escolhas, o que permite analisar a sua compreensão das relações e dos sinais a elas associados.

Figura 1. Questões da sessão 1.

1.Completa cada uma das expressões com o valor em falta de modo a torná-las verdadeiras. Justifica a tua resposta.

20x ____ = 20	
15= 5+ ___	
6= ___- 12	
____:2= 9	
16= 8x ____	

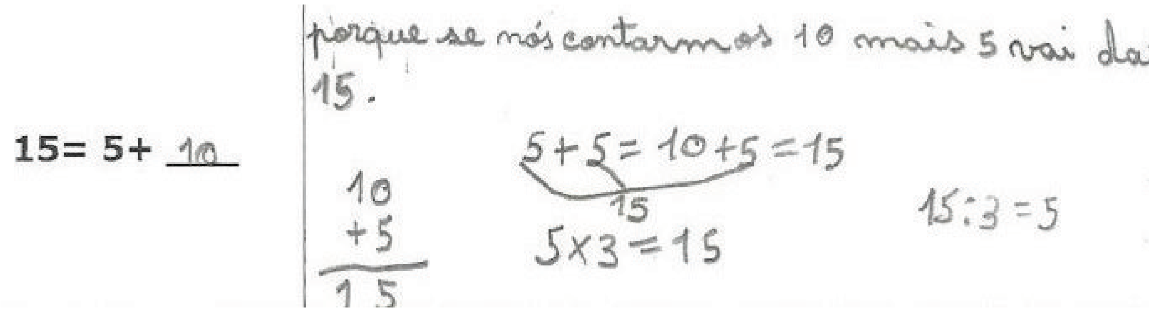
2. Completa com o valor que falta, de acordo com os sinais, de modo a que a expressão fique verdadeira. Justifica a tua resposta.

10+1>____	
____< 5x2	
10-5> ____	
___> 18-2	
15:3 < ____	

Banco de dados dos autores.

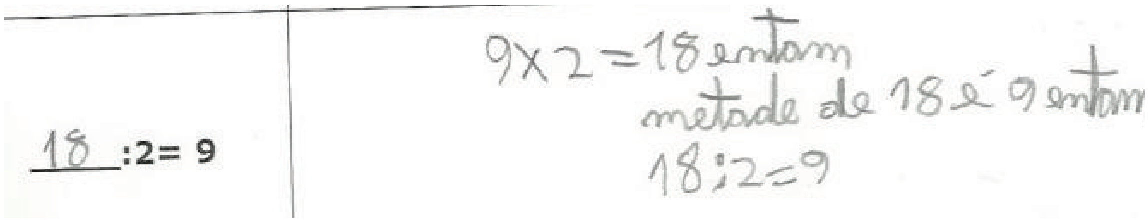
Na questão 1, envolvendo igualdades, os alunos não têm dificuldade na maioria das expressões, como se ilustra nos exemplos seguintes (Fig. 2 e 3):

Figura 2. Resolução de Rafaela, sessão 1.



Banco de dados dos autores.

Figura 3. Resolução de Gonçalo, sessão 1.



Banco de dados dos autores.

Nos momentos de discussão coletiva, os alunos partilham as suas estratégias. Rafaela, à semelhança do que acontece com a maioria da turma, apresenta a decomposição do número 15, mas indica outras estratégias para mostrar que a sua resolução é a mais correta. Gonçalo utiliza a operação inversa e complementa a sua justificação registando que 9 é metade de 18.

Ao longo da discussão coletiva os alunos apresentam com entusiasmo as suas estratégias:

Tiago: Eu fiz 3 contas…

Professora: Fizeste 3 contas, explica lá as 3 contas que tu fizeste que é para ficar mesmo justificado.

Tiago: Nove mais nove igual a 18 ou 2 vezes 9 igual a 18, por isso 18 a dividir por 2 igual a 9.

Os alunos mostram compreender a relação de igualdade e o significado do sinal de igual para além do seu aspeto computacional.

Na questão 2, com expressões envolvendo desigualdades, os alunos também não mostram dificuldades. Perante a expressão ___< 5×2, compreendem que o valor omisso terá que ser menor que 10:

Professora: Duarte, diz lá.

Duarte: Ainda tem o sinal de maior [justificação que o aluno apresentou, após ter colocado o número 10 no valor omisso].

Professora: Ainda tem o sinal de maior. Tem o sinal de maior? Primeiro que número é que tu puseste?

Duarte: 10.

Professora: O Duarte pôs 10. Toda a gente concorda?

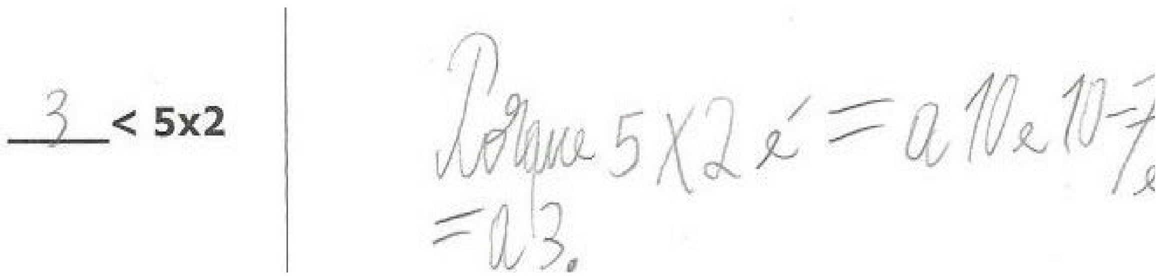
Rafaela: Não pode ser porque senão tinha que estar o sinal de igual.

Laura: Porque 5 vezes 2 é igual a 10…

Mara: E está aí o número 10.

Neste caso, Duarte tem dificuldade em identificar o verdadeiro significado do símbolo de maior, mas as suas colegas compreendem porque não pode ser o valor que ele apresenta. Nestas questões envolvendo as relações de ordem, a grande maioria dos alunos realiza uma subtração para encontrar a solução (Fig. 4).

Figura 4. Resolução de João, sessão 1.



Banco de dados dos autores.

Para além das questões de valor numérico omisso, também foram apresentadas questões em que os alunos tinham que encontrar o símbolo correto da relação, de modo a tornar a expressão verdadeira, como numa das questões da sessão 3 (Fig. 5):

Figura 5. Questão 2 da sessão 3.

2. Completa cada uma das questões com os sinais de <, > ou igual para que se tornem verdadeiras. Justifica a tua resposta.

38+ 45 _____ 40+ 43

40+ 45 _____ 41+ 45

39+ 42 _____ 40+ 43

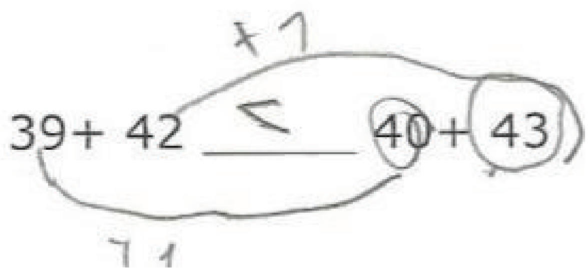
52- 25 _____ 50- 25

52- 29 _____ 52- 27

Banco de dados dos autores.

Ao longo da sessão, os alunos compreendem que os símbolos de maior e menor indicam que existe uma diferença entre cada membro da expressão, que, nestes casos, não representa uma equivalência. Esta compreensão é demonstrada nas justificações dediversos alunos (Fig. 6 e 7).

Figura 6. Resolução de Ricardo, sessão 3.



Banco de dados dos autores.

Figura 7. Resolução de Mauro, sessão 3.

39+ 42 __<__ 40+ 43

porque se eu juntar mais um ao 39 + 42 = a outra

Banco de dados dos autores.

Também na sessão 8 (Fig. 8), verificamos a compreensão de relações através das resoluções nas fichas de trabalho e da discussão em grande grupo.

Figura 8. Questões da sessão 8.

1. Completa cada uma das expressões com o valor em falta. Justifica a tua resposta.

73x____= 73x10+ 73x2

____+ 22= 15+ 24

80: 4= 80: _____:_____

55-____= 50-10

2. Das seguintes expressões mostra quais são as verdadeiras e as falsa
Justifica a tua resposta mostrando a relação que existe nas expressões

a) 123- 23 > 132-31

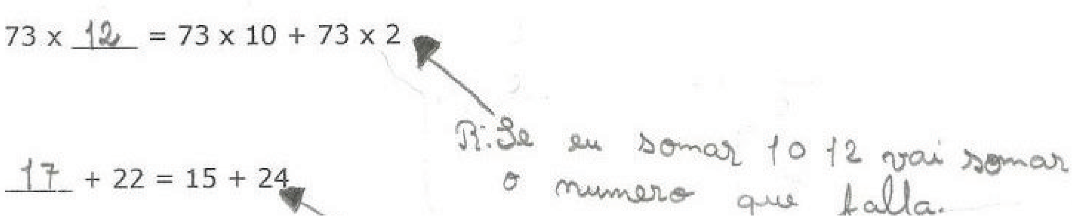
b) 248x 5 = 200x 5+ 40x5+ 8x5

c) 243x 5x2 > 243x 10x 2

Banco de dados dos autores.

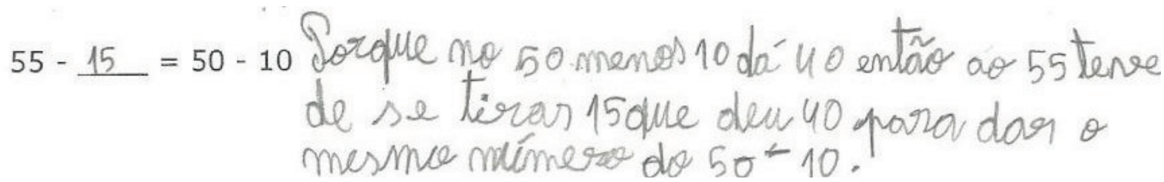
Nesta sessão, temos dois tipos de questões, primeiro de valor omisso e depois de verdadeiro e falso. As resoluções seguintes (Fig. 9 e 10) refletem o entendimento que os alunos têm da relação de igualdade:

Figura 9. Resolução de Tânia, Sessão 8.



Banco de dados dos autores.

Figura 10. Resolução de Gonçalo, Sessão 8.



Banco de dados dos autores.

Tânia reconhece a igualdade entre os dois membros da expressão e, por essa razão, escolhe o número 12 para o valor omisso. Também Gonçalo tem a percepção de que existe igualdade entre os dois membros da expressão e justifica o número 15 com a comparação que faz com o segundo membro. Ao longo da discussão coletiva, a grande maioria dos alunos refere a relação existente nesta expressão:

Professora: Mauro, como é que tu fizeste?

Mauro: Tinha 55 e tinha de dar 50 menos 10 que é igual a 40. Tirei 10 deu 45, menos 5 e deu 40.

[…]

David: Eu fiz 50 menos 10 dá 40. Depois percebi que 10 mais 5 dava 15 então somei esse 10 mais 5 que dava 15 e subtrai 55 menos 15.

Professora: Onde é que tu foste arranjar o 5?

David: Disse 15.

Professora: Sim mais tu disseste 10 mais 5 igual a 15. Onde é que tu foste buscar o 5?

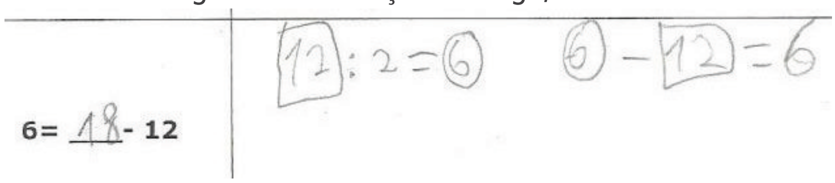
David: Dos 55.

Verificamos que nesta sessão a turma vê o sinal de igual como indicando equivalência e não apenas como resposta a um cálculo.

Dificuldades na compreensão das relações

Apesar de os alunos evidenciarem, ao longo das sessões, uma compreensão significativa das relações matemáticas, também existem dificuldades que se evidenciam em algumas sessões. Em primeiro lugar, muitos alunos mostram não perceber que a subtração não goza da propriedade comutativa (Fig. 11):

Figura 11. Resolução de Tiago, sessão 1.



Banco de dados dos autores.

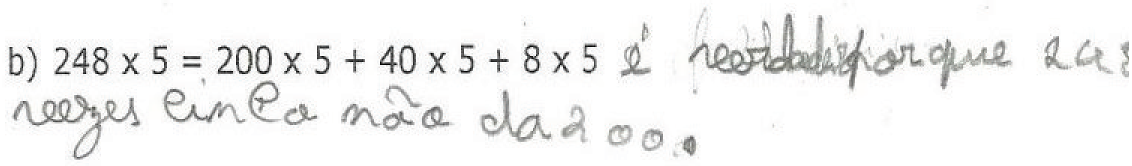
Apesar deste erro comum, alguns alunos conseguem compreender a incorreção, manifestando-o no momento de discussão coletiva:

Professora: Então quem é que concorda agora com o David? (Mara coloca do dedo no ar) Por quê?
Mara: Porque também pode dar 6.
Professora: Também pode dar 6?
Mara: E também pode dar 18. Dá de duas maneiras.
Professora: Então explica-me como é que pode dar o 6… Tu consegues tirar ao 6, 12?
Mara: Não…
Professora: Então achas que esta expressão que está aqui está correta [6: 12 = 6]?
Mara: Não.
[…]
David: Porque 12 é o dobro de 6.
Professora: Então como é que nós tínhamos que pôr, se quiséssemos que desse 6?
Mara: 12 menos 18…
Professora: Mas o 12 está do outro lado (lado direito do 18). Então tinha que ser que número?
David: 18.

Observando a resolução de David, o único aluno que coloca a resposta correta, os restantes alunos durante a discussão conseguem compreender porque é que a resposta não pode ser 6.

Também na sessão 8, verificamos que Beatriz não interpreta corretamente a relação de igualdade (Fig. 12):

Figura 12. Resolução de Beatriz, sessão 8.



Banco de dados dos autores.

Neste caso, perante uma expressão de verdadeiro/falso, os alunos têm que compreender a relação existente, tentando descobrir e justificar se esta é verdadeira ou falsa. Inicialmente, Beatriz afirma que a expressão é falsa e no momento da discussão coletiva altera a sua resposta para verdadeira. Contudo, a sua justificação confirma que a aluna não compreende muito bem a relação de igualdade porque vê 200 como a resposta a um cálculo e não como um termo do segundo membro da expressão.

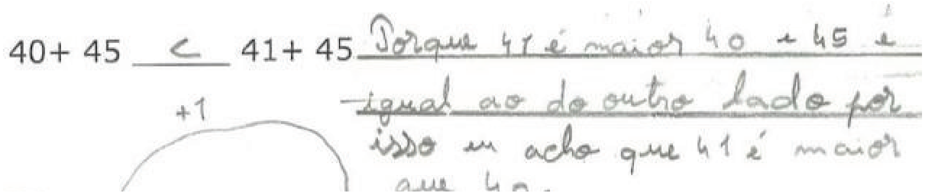
Uso de raciocínio relacional

Ao longo da experiência de ensino, detectamos muitos casos de uso de raciocínio relacional nos alunos. Apresentamos aqui casos de raciocínio por compensação, de uso de outras estratégias relacionais e de compreensão de propriedades.

Raciocínio de compensação

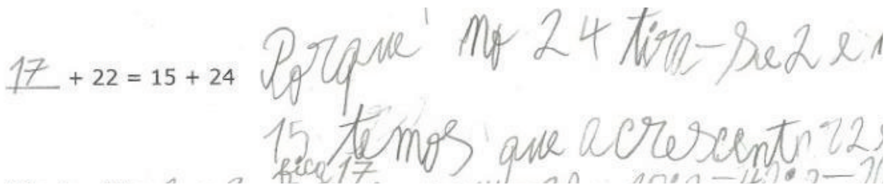
Nas sessões 3 e 8, os alunos usam raciocínio de compensação, para descobrirem o símbolo que falta na expressão e encontrarem o valor em falta (Fig. 13 e 14):

Figura 13. Resolução de Tânia, sessão 3.



Banco de dados dos autores.

Figura 14. Resolução de João, sessão 8.



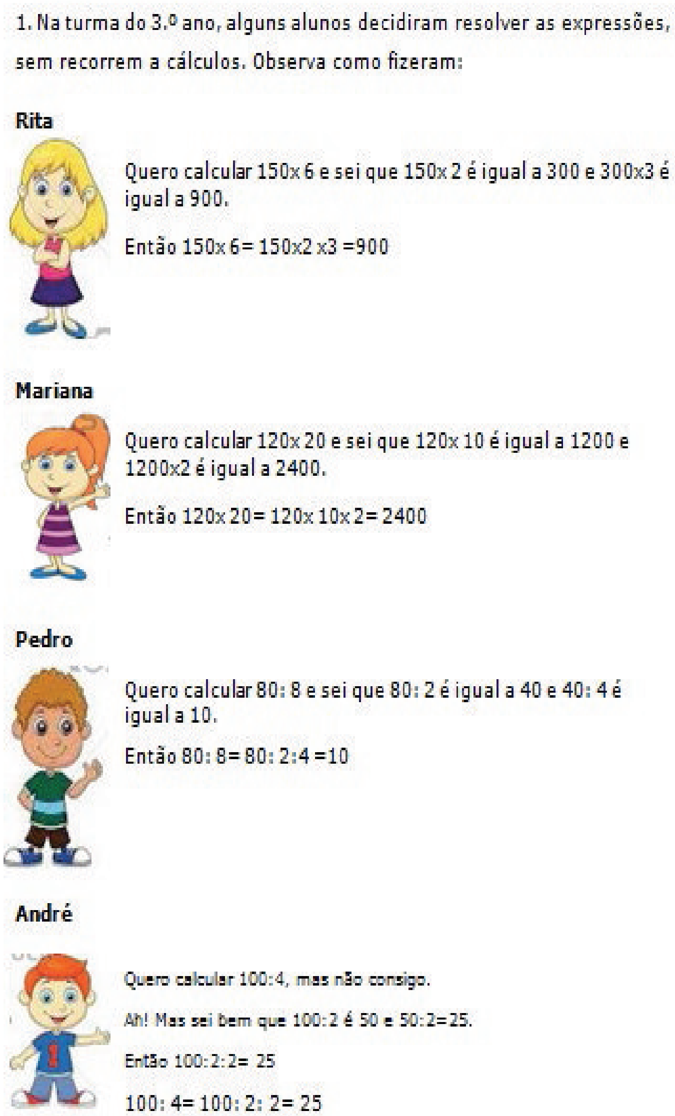
Banco de dados dos autores.

Nas duas resoluções os alunos não recorrem a cálculos e encontram o símbolo e o valor corretos quando analisam a estrutura da expressão. Neste caso, olham para os dois membros da expressão e relacionam-nos entre si.

Outras estratégias relacionais

A turma desenvolve também raciocínios relacionados com a decomposição de fatores de modo a facilitar os cálculos, como se verifica no seguinte problema (Fig. 15) proposto na sessão 5:

Figura 15. Questão da sessão 5.


1. Na turma do 3.º ano, alguns alunos decidiram resolver as expressões, sem recorrem a cálculos. Observa como fizeram:

Rita

Quero calcular 150x 6 e sei que 150x 2 é igual a 300 e 300x3 é igual a 900.

Então 150x 6= 150x2 x3 =900

Mariana

Quero calcular 120x 20 e sei que 120x 10 é igual a 1200 e 1200x2 é igual a 2400.

Então 120x 20= 120x 10x 2= 2400

Pedro

Quero calcular 80: 8 e sei que 80: 2 é igual a 40 e 40: 4 é igual a 10.

Então 80: 8= 80: 2:4 =10

André

Quero calcular 100:4, mas não consigo.

Ah! Mas sei bem que 100:2 é 50 e 50:2=25.

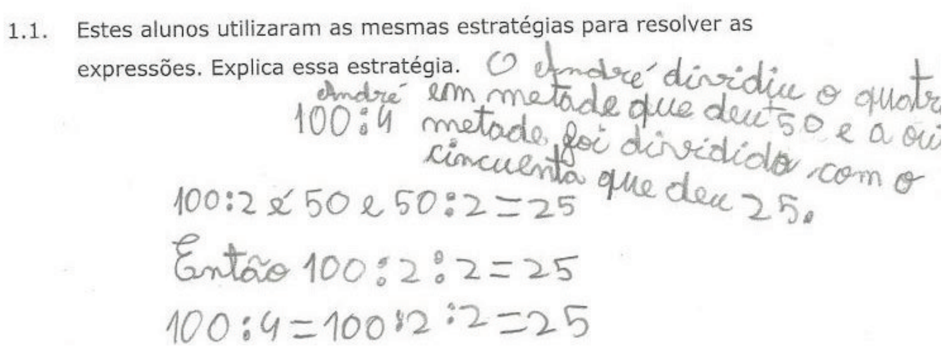
Então 100:2:2= 25

100: 4= 100: 2: 2= 25

Banco de dados dos autores.

A turma tinha que explicar as diferentes estratégias representadas. Surgem então diversas resoluções, destacando-se as de Gonçalo e Rafaela (Fig. 16 e 17):

Figura 16. Resolução de Gonçalo, sessão 5.


1.1. Estes alunos utilizaram as mesmas estratégias para resolver as expressões. Explica essa estratégia. O André dividiu o quatr em metade que deu 50 e a ou metade foi dividida com o cincuenta que deu 25.

André 100:4

100:2 é 50 e 50:2=25

Então 100:2:2=25

100:4=100:2:2=25

Banco de dados dos autores.

Figura 17. Resolução de Rafaela, sessão 5.

Diretamente - que se fez tal coal lá está,
indiretamente - utiliza-se outras estratégias que dão result
igual ao resultado da conta.
R: Em vez de fazer diretamente a conta eles fizeram-na
indiretamente.

Banco de dados dos autores.

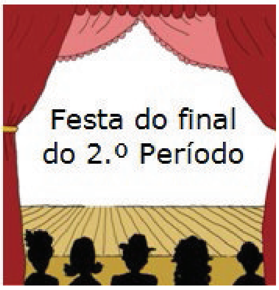
A referência que Gonçalo faz em linguagem matemática foi retirada do enunciado, mas o que escreve em linguagem natural é a sua justificação. Rafaela justifica de forma mais geral explicando que, quando não conseguimos resolver diretamente uma expressão, podemos resolvê-la indiretamente simplificando os cálculos.

Na sessão 6, alguns alunos usam estratégias relacionais para resolver um problema (Fig. 18).

Figura 18. Questão da sessão 6.

1. Na escola da Luana, todas as turmas vão fazer uma atividade para a festa de final do 2.º Período. Para receber os pais no grande dia, vão ser colocadas 100 cadeiras no polidesportivo.

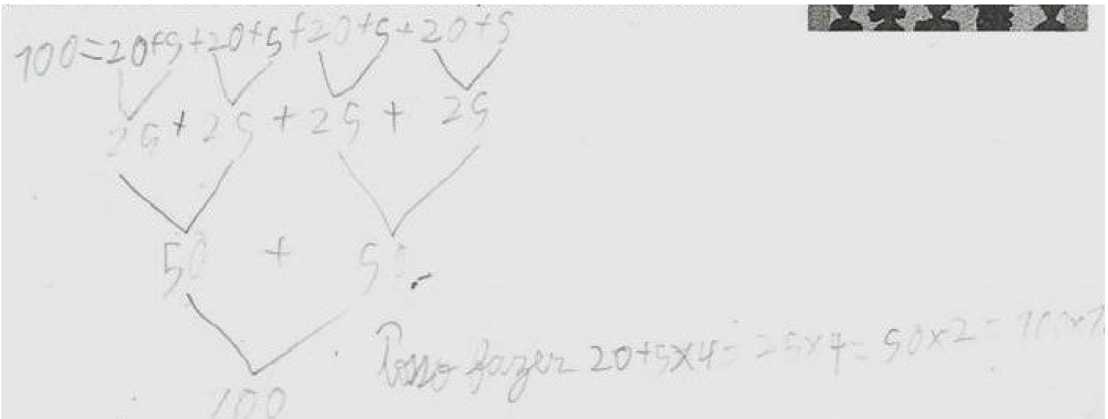
1.1. Quantas filas, como o mesmo número de cadeiras, se podem fazer com as 100 cadeiras. Explica o teu raciocínio.



Banco de dados dos autores.

Nesta situação, o objetivo é que os alunos desenvolvam diferentes estratégias de resolução sem recorrer a cálculos. Além disso, espera-se que tenham consciência das diferentes opções que podem surgir. Por exemplo, David conseguiu decompor o número 100 de diferentes maneiras e apresenta uma expressão que demonstra as adições sucessivas que fez (Fig. 19).

Figura 19. Resolução de David, sessão 6.

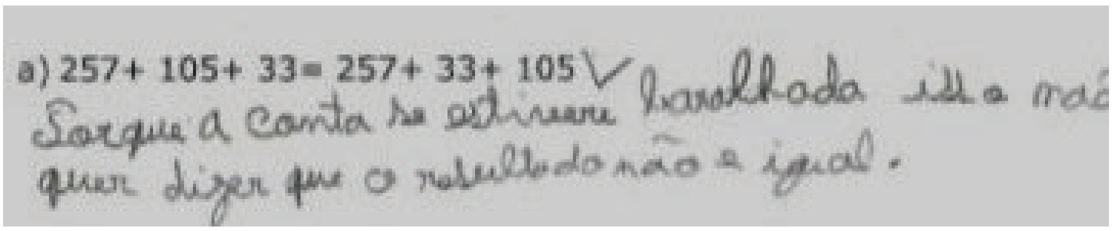


Banco de dados dos autores.

Compreensão de propriedades

Por último, observamos o uso de raciocínio relacional quando os alunos mostram compreensão das propriedades das operações. Embora não consigam identificar as propriedades de modo formal, os alunos conseguem explicar o que acontece nas expressões. A resolução seguinte (Fig. 20) surgiu na sessão 6, numa questão cujo objetivo era verificar se uma expressão era verdadeira ou falsa.

Figura 20. Resolução de Beatriz, sessão 6.



Banco de dados dos autores.

Beatriz, ao olhar para a expressão, reconhece que esta é verdadeira porque apenas há uma troca na ordem dos seus termos na expressão e o resultado mantém-se.

É também no momento de discussão coletiva que compreendemos que os alunos têm bem presente a propriedade comutativa:

Professora: Então a primeira expressão é verdadeira ou é falsa?

Vários alunos: Verdadeira.

Professora: Por que, Mauro?

Mauro: Porque só trocaram os lugares do 105 e do 33.

Neste caso, os alunos explicam a relação que existe na expressão e, mais uma vez, compreendem que os dois membros têm o mesmo valor, sem necessitarem de fazer cálculos para perceberem que esta é verdadeira.

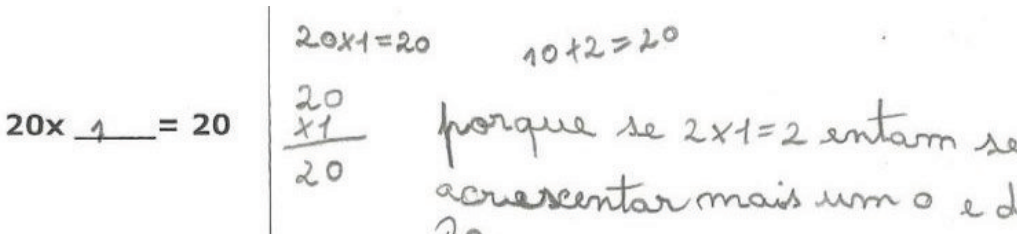
Generalizações

Neste estudo, procurava-se também perceber que generalizações os alunos são capazes de fazer, nomeadamente sobre propriedades matemáticas. A maioria das generalizações surge nos momentos de discussão coletiva, quando os alunos apresentam as suas estratégias e justificam os seus raciocínios. De modo gradual, foram-se construindo generalizações em linguagem natural.

Generalização de argumentos

Algumas generalizações realizadas são generalização de argumentos, em que o aluno repete uma ideia que já é tida como certa, como na sessão 1 (Fig. 21):

Figura 21. Resolução de Rafaela, Sessão 1.



Banco de dados dos autores.

Também noutros momentos de discussão coletiva, surge este tipo de generalização tendo como base a propriedade da existência do elemento neutro:

Professora: Joana diz lá.

Joana: Eu pus 20×1 porque se fosse 20 com qualquer outro número não dava.

[…]

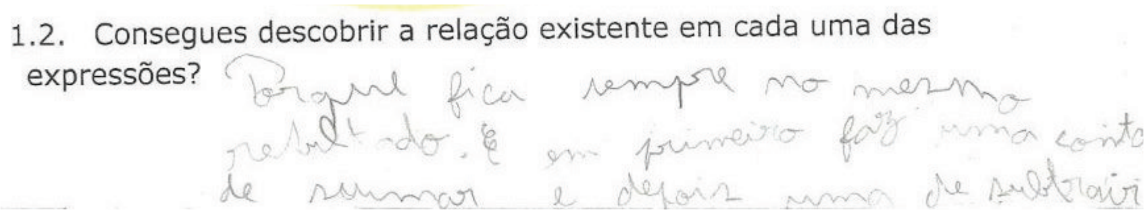
Joana: Qualquer número que nós pusermos vezes um, esse número que nós pusermos vezes um é o resultado.

Joana percebe que este caso pode ser transposto para outros valores, sem ter a noção de que está a utilizar uma propriedade matemática.

Estratégia $a + b - b = a$

Também a generalização da estratégia a + b – b = a surgiu na sessão 2, quando os alunos são chamados a explicar que relação existe entre cada uma das expressões (Fig. 22):

Figura 22. Resolução de Tiago, Sessão 2.


1.2. Consegues descobrir a relação existente em cada uma das expressões? Porque fica sempre no mesmo resultado. E em primeiro faz uma conta de sumar e depois uma de subtrair

Banco de dados dos autores.

Neste caso, Tiago compreende que o resultado é sempre igual em todas as expressões, ou seja, o segundo membro é sempre igual ao primeiro. Mas, vai além, quando explica porque isso acontece, referindo que resulta de se fazer uma adição e depois uma subtração, apenas não referindo que tem que ser com o mesmo valor.

Generalização de um caso concreto para qualquer número

Tal como referido, é nos momentos de discussão coletiva que surge a maioria das generalizações. A transcrição seguinte da sessão 5 demonstra a tentativa de generalizar uma estratégia usada num certo caso para qualquer número. A discussão tem em vista compreender que a estratégia de simplificação de cálculos não serve apenas para os números desta questão, mas para quaisquer números que surjam:

> David: Porque se nós não soubermos, por exemplo, x número multiplicado por 6 podemos utilizar uma estratégia com outras contas diferentes que pode dar o resultado.
> Professora: Ele está a dizer que se não conseguirmos arranjar um x número?
> David: Sim um número qualquer…

David já usa de forma muito espontânea a expressão *x número* tendo a noção que esta situação poderá surgir para outros números, além dos apresentados. Uma situação idêntica regista-se na sessão 7, em que os alunos intervêm em conjunto procurando elaborar uma frase que demonstre uma dada equivalência.

Conclusão

A maioria dos alunos consegue reconhecer as relações de igualdade e desigualdade e interpreta corretamente tanto o sinal de igual como os sinais de maior e menor. Os alunos deixam de interpretar a relação de igualdade de uma forma limitada, como indicando apenas a resposta a um cálculo. Além disso, demonstram desenvolver a capacidade de raciocinar matematicamente, compreendendo as relações estabelecidas (tal como em Carpenter; Levi; Franke; Zeringue, 2005). No final das sessões, conseguem olhar para as expressões e reconhecer as relações existentes entre os números e as operações e desenvolvem a capacidade de resolver questões não apenas recorrendo a cálculos, mas também realizando raciocínio relacional. Desta forma, a sua aprendizagem da Aritmética é muito mais significativa do que a que se verifica habitualmente. Os alunos conseguem aliar o sentido estrutural das expressões com o raciocínio relacional, ou seja, observam muito mais as relações e a estrutura das expressões, procurando resolvê-las sem recorrer a raciocínio computacional.

Percebemos também que, tal como no estudo de Carpenter, Franke e Levi (2003), com tarefas de valor omisso e de verdadeiro e falso, os alunos procuram o valor omisso ou tentam perceber qual é a veracidade da expressão através de raciocínio relacional e desenvolvem estratégias de simplificação de cálculos para solucionar questões aritméticas. Apesar disso, algumas dessas estratégias acabam por não estar corretas, nomeadamente em expressões que envolvem a subtração. Nas questões de valor omisso, numa fase inicial, os alunos generalizam a propriedade comutativa da adição para expressões envolvendo a subtração. Têm consciência da existência desta propriedade e de que esta pode ser utilizada para simplificar cálculos, mas não compreendem que ela não se aplica à subtração (como também foi verificado em Fuson et al, 1997). Um caso muito interessante é o de Beatriz, que apenas chegou nas últimas sessões do estudo, e que comete erros que não encontramos em mais nenhum aluno. A aluna não interpreta a relação de igualdade do mesmo modo que os colegas e vê o sinal de igual apenas como resposta a um cálculo. Na relação de ordem a aluna não compreende que um membro da expressão tem que ser maior que outro. Evidencia-se, de modo claro, a diferença que as primeiras sessões representam para a generalidade dos alunos da turma.

À semelhança do que acontece noutros estudos (por exemplo, Carpenter; Frank; Levi, 2003; Carpenter; Levi, 2000), as primeiras generalizações estão relacionadas com o número 0. Além disso, tal como no estudo de Ellis (2011), as generalizações são elaboradas em momentos de discussão coletiva, através da apresentação e debate de ideias, a partir de expressões generalizáveis. No entanto, as generalizações apenas surgem quando é pedido de forma explícita aos alunos para criar uma frase ou expressão que demonstre o que foi feito. Ou seja, os alunos não conseguem ainda utilizar símbolos e criar expressões generalizadas com autonomia. É também de sublinhar que o trabalho baseado na discussão em grande grupo, com partilha de ideias, ajudou manifestamente os alunos na justificação das suas estratégias. Em termos gerais, os resultados deste estudo mostram que é possível trabalhar no sentido de desenvolver o raciocínio algébrico em alunos deste nível de ensino, com resultados muito encorajantes.

Referências

ARCAVI, A. Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. **For the Learning of Mathematics**, 14(3), 24-35, 1994.

______. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In: VALE. I. et al. (Org.). **Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2006. p. 29-48.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In: CAI J.; KNUTH, E. (Eds.). **Early algebraization**: A global dialogue from multiple perspectives. Heidelberg: Springer, 2011. p. 5-23

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: Introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

CANAVARRO, A., P. O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, 2, p. 81-118, 2007.

CARPENTER; T.; LEVI, L.; FRANKE, M. L.; ZERINGUE, J. K. Algebra in elementary school: Developing relational thinking. **ZDM**, 37(7), p. 53- 59, 2005.

CARPENTER, T. P.; FRANKE, M. L.; LEVI, L. **Thinking mathematically**: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann, 2003.

ELLIS, A., B. Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. **Journal for Research in Mathematics Education**, 42(4), p. 308-345, 2011.

FUSON, C. K., et al. Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigitaddition and subtraction**. Journal for Research in Mathematics Education**, *2,* p. 130-162, 1997.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Eds.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 1999. p. 133-155.

KIERAN, C. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**, 12*,* p. 317- 326, 1981.

MOLINA, M.; CASTRO, E.; CASTRO, H. Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. **Electronic Journal of Research in Educational Psychology,** 17(7), p. 341-368, 2009.

NCTM. **Princípios e normas para a Matemática escolar**. Lisboa: APM, 2007.

______. **Normas profissionais para o ensino da Matemática**. Lisboa: IIE e APM, 1944.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. Álgebra no Ensino Básico. Lisboa: DGIDC, 2009.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. **Práxis Educativa***,* 7(2), p. 355-377, 2012.